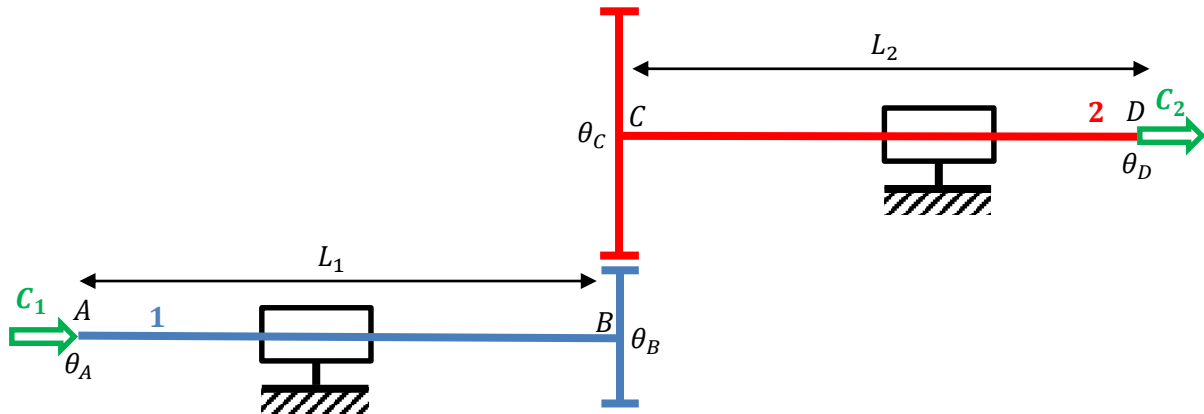


| | | |
|----------------------|---------|------------------|
| Dernière mise à jour | TD RdM | Denis DEFAUCHY |
| 05/12/2015 | Torsion | TD5 - Correction |

Torsion

Exercice 1: Déformation en torsion des arbres d'un réducteur



Question 1: Déterminer le couple C_1 transitant dans l'arbre 1 en fonction de C_2 et μ .

$$C_1 = \mu C_2$$

Question 2: Déterminer la déformation angulaire de l'arbre 1 : $\Delta\theta_1 = \theta_B - \theta_A$.

$$\gamma_x = \frac{M_t}{GI_G}$$

$$\Delta\theta_1 = \theta_B - \theta_A = \theta_B = \int_0^{L_1} \gamma_x dx = L_1 \gamma_x = L_1 \frac{M_t}{GI_G} = L_1 \frac{C_1}{GI_G} = L_1 \frac{\mu C_2}{GI_G}$$

$$\Delta\theta_1 = L_1 \frac{\mu C_2}{GI_G}$$

Question 3: En déduire la rotation induite par cette déformation dans l'arbre 2 : θ_C .

$$\mu = \frac{\theta_C}{\theta_B}$$

$$\theta_C = \mu \theta_B = L_1 \frac{\mu^2 C_2}{GI_G}$$

Question 4: Déterminer la déformation angulaire de l'arbre 2 : $\Delta\theta_2 = \theta_D - \theta_C$.

$$\Delta\theta_2 = \theta_D - \theta_C = L_2 \frac{C_2}{GI_G}$$

Question 5: En déduire le décalage entre l'angle de l'arbre de sortie au repos à son extrémité D et cet angle sous charge θ_D en fonction de C_2 .

| | | |
|----------------------|---------|------------------|
| Dernière mise à jour | TD RdM | Denis DEFAUCHY |
| 05/12/2015 | Torsion | TD5 - Correction |

$$\theta_D = L_2 \frac{C_2}{GI_G} + \theta_C = L_2 \frac{C_2}{GI_G} + L_1 \frac{\mu^2 C_2}{GI_G}$$

$$\theta_D = \frac{C_2}{GI_G} (\mu^2 L_1 + L_2)$$

$$\theta_D = \frac{C_2}{G \frac{\pi d^4}{32}} (\mu^2 L_1 + L_2)$$

$$\theta_D = \frac{32 C_2}{G \pi d^4} (\mu^2 L_1 + L_2)$$

Question 6: Application numérique :

$$C_2 = 100 \text{ Nm} - \mu = -0,5 - d = 50 \text{ mm} - L_1 = 200 \text{ mm} - L_2 = 300 \text{ mm}$$

$$\theta_D = \frac{32 * 100}{80 * 10^9 * \pi * 0,01^4} ((-0,5)^2 * 0,2 + 0,3) = 0,4456 \text{ rd} = 25,53^\circ$$

On souhaite limiter la rotation issue de la déformation des arbres à $\Delta\theta_{max} = 0,1^\circ$.

Question 7: Quel diamètre d doit-on choisir ?

$$\Delta\theta_{max} = \frac{32 C_2}{G \pi d^4} [\mu^2 L_1 + L_2]$$

$$d = \left[\frac{(\mu^2 L_1 + L_2) 32 C_2}{G \pi \Delta\theta_{max}} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$d = \left[\frac{(0,5^2 * 0,2 + 0,3) * 32 * 100}{80 * 10^9 * \pi * \frac{0,1 * \pi}{180}} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$d = 39,98 \text{ mm}$$

Question 8: Calculer la contrainte maximale dans la matière.

$$\tau_1 = \frac{d M_{t1}}{2 I_G} = \frac{d C_1}{2 \frac{\pi d^4}{32}} = 16 \frac{\mu C_2}{\pi d^3}$$

$$\tau_2 = 16 d \frac{C_2}{\pi d^4}$$

$$\tau_1 = 16 * \frac{0,5 * 100}{\pi * 0,03998^3} = 3,98 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = 16 * \frac{100}{\pi * 0,03998^3} = 7,96 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = 7,96 \text{ MPa}$$

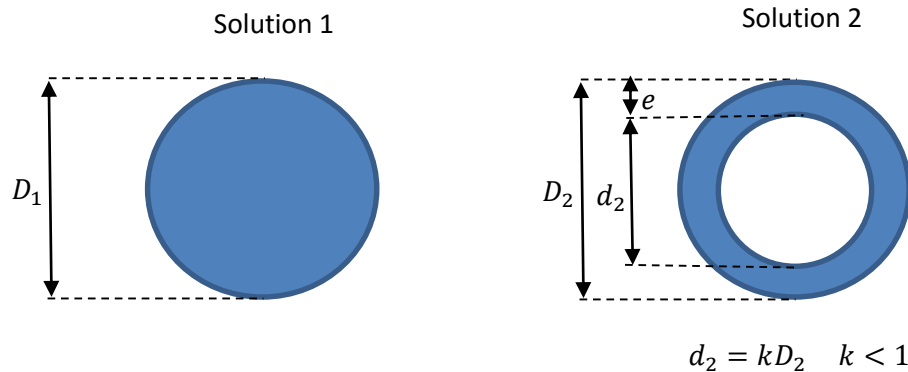
On donne : $R_G = 100 \text{ MPa}$.

Question 9: Quel coefficient de sécurité est respecté ?

$$\alpha = \frac{R_G}{\tau_{max}} = \frac{100}{28,12} = 12,5$$

| | | |
|----------------------|---------|------------------|
| Dernière mise à jour | TD RdM | Denis DEFAUCHY |
| 05/12/2015 | Torsion | TD5 - Correction |

Exercice 2: Choix de la géométrie d'un arbre en torsion



Question 1: Donner l'expression littérale de la contrainte tangentielle maximale dans la solution 1.

$$\tau_1 = \frac{D_1 M_t}{2 I_{G1}}$$

$$I_{G1} = \frac{\pi D_1^4}{32}$$

$$\tau_1 = \frac{D_1 M_t}{2 \frac{\pi D_1^4}{32}} = \frac{16 M_t}{\pi D_1^3} = \frac{16 C_1}{\pi D_1^3}$$

Question 2: En déduire le diamètre D_1 de la solution initiale arbre plein.

$$\tau_1 = \frac{16 C_1}{\pi D_1^3}$$

On transmet le couple max lorsque $\tau_1 = R_{pG}$

$$\frac{16 C_1}{\pi D_1^3} = R_{pG}$$

$$D_1 = \left(\frac{16 C_1}{\pi R_{pG}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$D_1 = \left(\frac{16 * 6}{\pi * 15 * 10^6} \right)^{\frac{1}{3}} = 12,67681153 \text{ mm}$$

Les chiffres significatifs ont de l'importance pour le calcul de D_2 dans une des dernières questions.

Question 3: Donner l'expression littérale de la contrainte maximale admissible dans la solution 2.

$$\tau_2 = \frac{D_2 M_t}{2 I_{G2}}$$

$$I_{G2} = \pi \frac{D_2^4 - d_2^4}{32}$$

| | | |
|----------------------|---------|------------------|
| Dernière mise à jour | TD RdM | Denis DEFAUCHY |
| 05/12/2015 | Torsion | TD5 - Correction |

$$\tau_2 = \frac{D_2}{2} \frac{M_t}{\pi \frac{D_2^4 - d_2^4}{32}} = \frac{16D_2 M_t}{\pi(D_2^4 - d_2^4)} = \frac{16D_2 C_2}{\pi(D_2^4 - d_2^4)}$$

$$\tau_2 = \frac{16D_2 C_2}{\pi D_2^4 (1 - k^4)} = \frac{16C_2}{\pi D_2^3 (1 - k^4)}$$

Question 4: Déterminer le rapport des couples transmissibles $\frac{C_2}{C_1}$ dans les deux solutions en fonction de D_1 , D_2 et k .

On souhaite transmettre des couples différents tout en allant jusqu'à la limite maximale admissible en termes de contrainte. Dans les 2 solutions, on atteint donc la même contrainte.

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_{max}$$

$$\frac{16C_1}{\pi D_1^3} = \frac{16C_2}{\pi D_2^3 (1 - k^4)}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 (1 - k^4)$$

Question 5: Traduire la condition d'égalité des masses et des matériaux

$$m_1 = m_2$$

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

Même matériau : $\rho_1 = \rho_2$

$$V_1 = V_2$$

$$L_1 S_1 = L_2 S_2$$

Même longueur : $L_1 = L_2$

$$S_1 = S_2$$

Question 6: En déduire le rapport $\frac{D_2}{D_1}$ en fonction de k .

$$\frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi D_2^2 (1 - k^2)}{4}$$

$$D_1^2 = D_2^2 (1 - k^2)$$

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = 1 - k^2$$

$$\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = \frac{1}{1 - k^2}$$

Question 7: Connaissant le diamètre D_1 de la solution arbre plein, en déduire le diamètre D_2 de la solution arbre creux de même masse en fonction de D_1 et k

$$D_1 = D_2 \sqrt{1 - k^2}$$

| | | |
|----------------------|---------|------------------|
| Dernière mise à jour | TD RdM | Denis DEFAUCHY |
| 05/12/2015 | Torsion | TD5 - Correction |

Question 8: Déterminer le rapport $\frac{C_2}{C_1}$ en fonction k .

$$\frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 (1 - k^4)$$

$$\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 = \left[\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{(1 - k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{1 - k^4}{(1 - k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1 - k^2)(1 + k^2)}{(1 - k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1 - k^2)}{(1 - k^2)^{\frac{3}{2}}}(1 + k^2) = \frac{1 + k^2}{\sqrt{1 - k^2}}$$

Ainsi, pour un arbre plein donné de diamètre D_1 dans lequel transite un couple C_1 , en passant par une géométrie de type cylindre creux, on a le nouveau couple transmissible C_2 à même masse et même contrainte limite en fonction de k .

Question 9: Application numérique : Déterminer k , D_1 et le rapport $\frac{C_2}{C_1}$ pour $D_2 = 80 \text{ mm}$ et $e = 2 \text{ mm}$

$$d_2 = kD_2$$

$$k = \frac{d_2}{D_2} = \frac{D_2 - 2e}{D_2} = \frac{76}{80} = 0.95$$

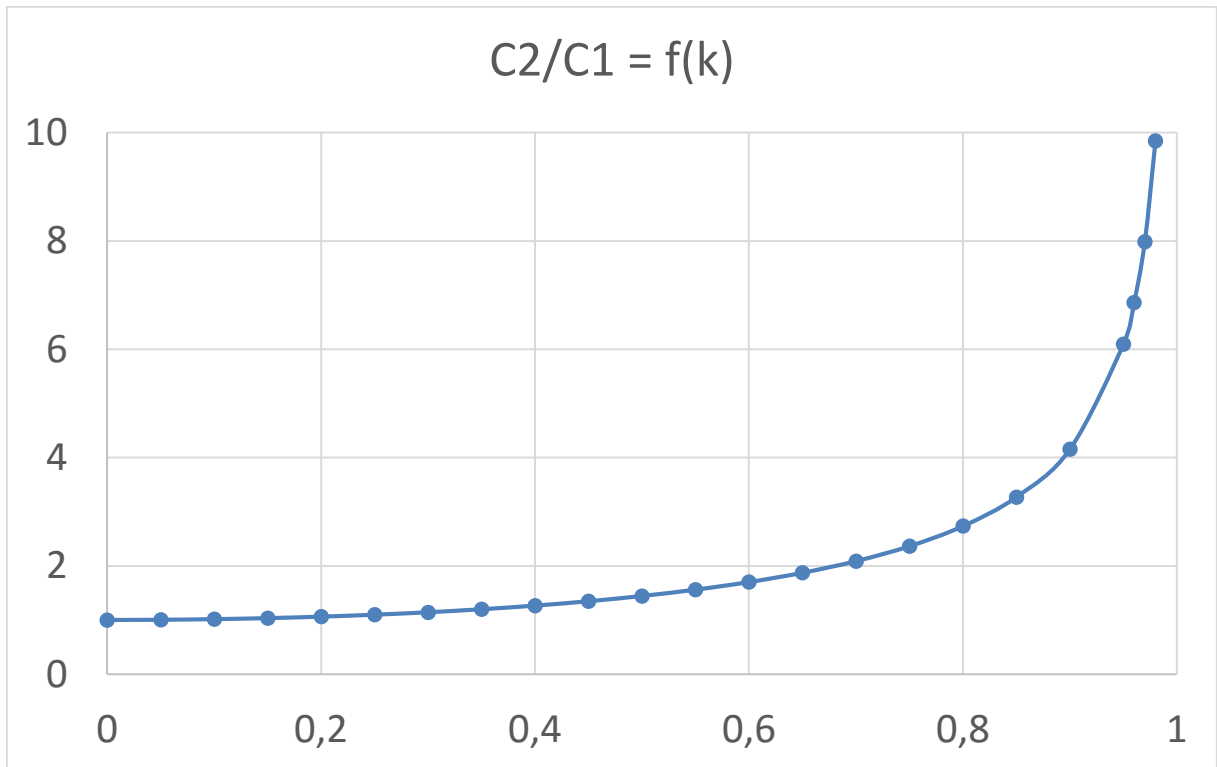
$$D_1 = D_2 \sqrt{1 - k^2} = 80 \sqrt{1 - 0.95^2} = 24,98 \text{ mm}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{1 - k^4}{(1 - k^2)^{\frac{3}{2}}} = 6.09$$

On transmet donc un couple 6 fois plus important dans le cas d'un arbre creux de diamètre 80 mm et d'épaisseur 2 mm que l'arbre plein de même masse, longueur et matériau de diamètre D_1 .

| | | |
|----------------------|---------|------------------|
| Dernière mise à jour | TD RdM | Denis DEFAUCHY |
| 05/12/2015 | Torsion | TD5 - Correction |

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{1 - k^4}{(1 - k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 + k^2}{\sqrt{1 - k^2}}$$



Question 10: Que peut-on dire sur le choix de k pour augmenter le couple transmissible.

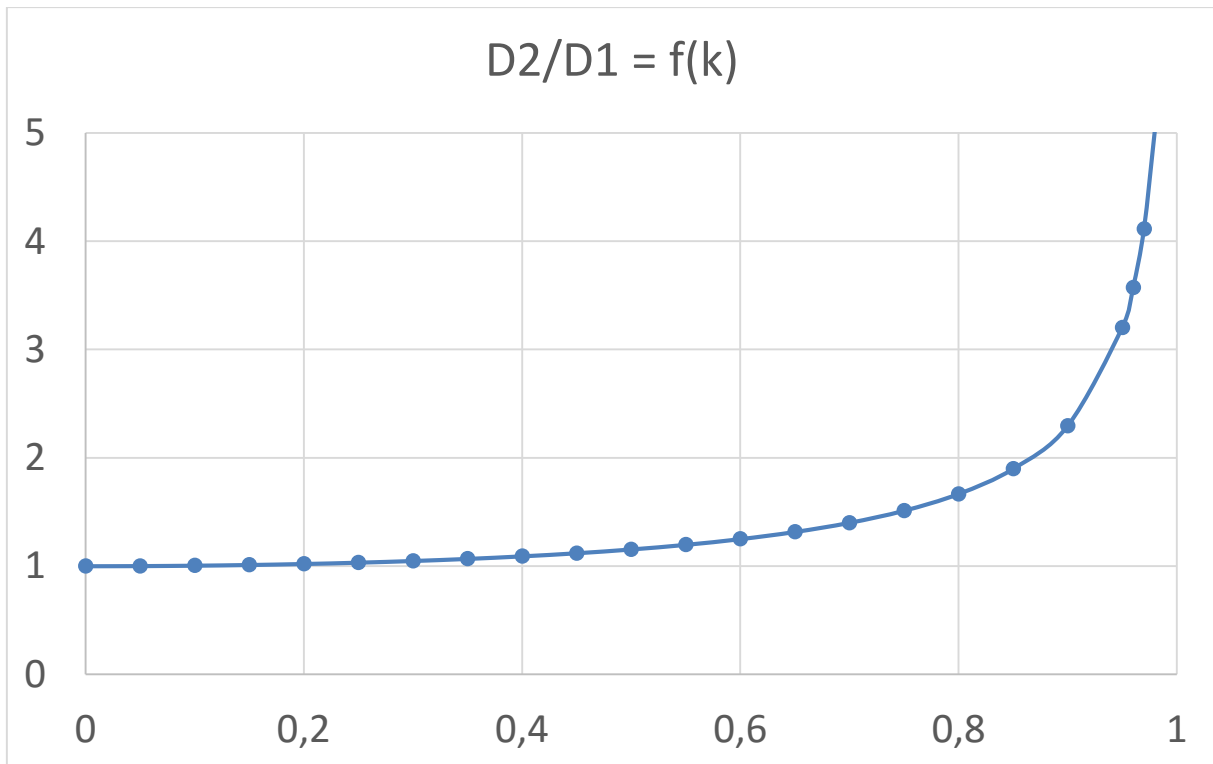
Plus k est grand, plus le couple transmissible est important.

Question 11: Exprimer le rapport $\frac{D_2}{D_1}$ en fonction de k .

$$\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = \frac{1}{1 - k^2}$$

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}$$

| | | |
|----------------------|---------|------------------|
| Dernière mise à jour | TD RdM | Denis DEFAUCHY |
| 05/12/2015 | Torsion | TD5 - Correction |



Question 12: Que peut-on dire sur le choix de k pour augmenter le couple transmissible.

Plus k est grand, plus D_2 est important.

Question 13: Conclure quant au choix de k pour un problème donné.

On va chercher à avoir k proche de 1, c'est-à-dire D_2 le plus grand possible. Toutefois, D_2 va être limité par l'encombrement disponible.

Remarque : attention à ne pas avoir une épaisseur trop faible qui poserait des problèmes de :

- Fabrication
- Résistance à d'autres sollicitations

Couple maximal transmissible de la nouvelle solution

Question 14: Quel diamètre D_2 faut-il choisir pour transmettre le plus grand couple ?

$$D_2 = D_{max} = 30 \text{ mm}$$

Question 15: En déduire k et d_2 .

$$\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = \frac{1}{1 - k^2}$$

$$k = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

| | | |
|----------------------|---------|------------------|
| Dernière mise à jour | TD RdM | Denis DEFAUCHY |
| 05/12/2015 | Torsion | TD5 - Correction |

$$k = \left[1 - \left(\frac{12,67681153}{30} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0,9063347735$$

$$d_2 = kD_2 = 27,19004321 \text{ mm}$$

Question 16: En déduire le couple maximal transmissible C_2 .

$$C_2 = C_1 \frac{1 - k^4}{(1 - k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$C_2 = 6 \frac{1 - 0,9063^4}{(1 - 0,9063^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$C_2 = 6 * 4,3$$

$$C_2 = 25,8 \text{ Nm}$$

Question 17: Est-il possible de répondre au cahier des charges imposé par le client.

Il est possible de répondre au besoin du client qui demande un couple maximal transmissible de 24 Nm.

On a alors :

$$D_2 = 30 \text{ mm}$$

$$d_2 = 25.8 \text{ mm}$$

Les contraintes du problème imposent de minimiser D_2 . On peut donc optimiser la solution en choisissant un diamètre D_2 le plus faible possible.

Réponse au besoin client

Question 18: Connaissant $\frac{C_2}{C_1}$, déterminer k par lecture graphique.

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{1 - k^4}{(1 - k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{24}{6} = 4$$

On trouve :

$$k = 0,8933$$

Question 19: En déduire le diamètre D_2 puis d_2 .

$$D_2 = \frac{D_1}{\sqrt{1 - k^2}} = \frac{12,67681153}{\sqrt{1 - 0,8933^2}}$$

Attention : les chiffres significatifs changent la solution (je m'en suis rendu compte en repassant par $\tau_2 = R_{p_g}$)

| | | |
|----------------------|---------|------------------|
| Dernière mise à jour | TD RdM | Denis DEFAUCHY |
| 05/12/2015 | Torsion | TD5 - Correction |

$$D_2 = 28,20 \text{ mm}$$

$$d_2 = 25.19 \text{ mm}$$

Question 20: Quelle solution envisagez-vous donc de proposer au client.

On répond au besoin de l'industriel en proposant de remplacer l'arbre d'entrée initial par un arbre creux de dimensions :

$$D_2 = 28,20 \text{ mm}$$

$$d_2 = 25.19 \text{ mm}$$

Le nouveau couple maximal transmissible est de 24 Nm et la masse du réducteur n'a pas changé.

A l'avenir, on pourrait en respectant la valeur maximale de 30 mm de diamètre d'arbre, augmenter ce couple jusqu'à une valeur de 25,8 Nm.